- Monotonost i ekstremne vrijednosti funkcije -

Neka je funkcija $y=f(x)$ definisana na intervalu I.

Za funkciju $f(x)$ kažemo da je <u>rastuća</u> na intervalu I, ako za svako $x_1, x_2 \in I$ važi:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Za funkciju $f(x)$ kažemo da je <u>opadajuća</u> na intervalu I, ako za svako $x_1, x_2 \in I$ važi:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Funkcija $f(x)$ je <u>nerastuća</u> na intervalu I ako za svako $x_1, x_2 \in I$ važi:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

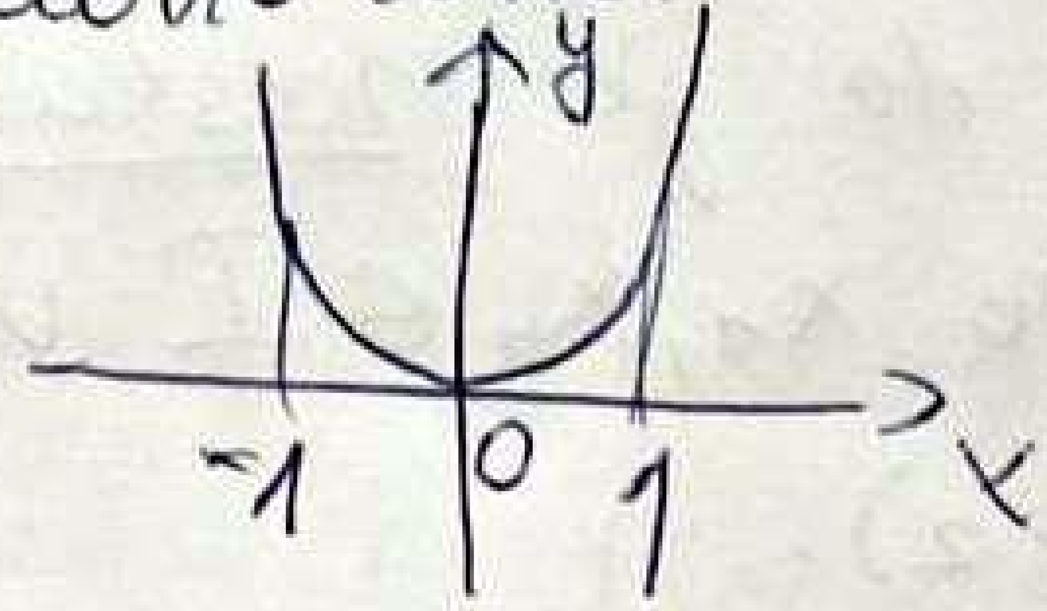
Funkcija $f(x)$ je <u>neopadajuća</u> na intervalu I ako za svako $x_1, x_2 \in I$ važi:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

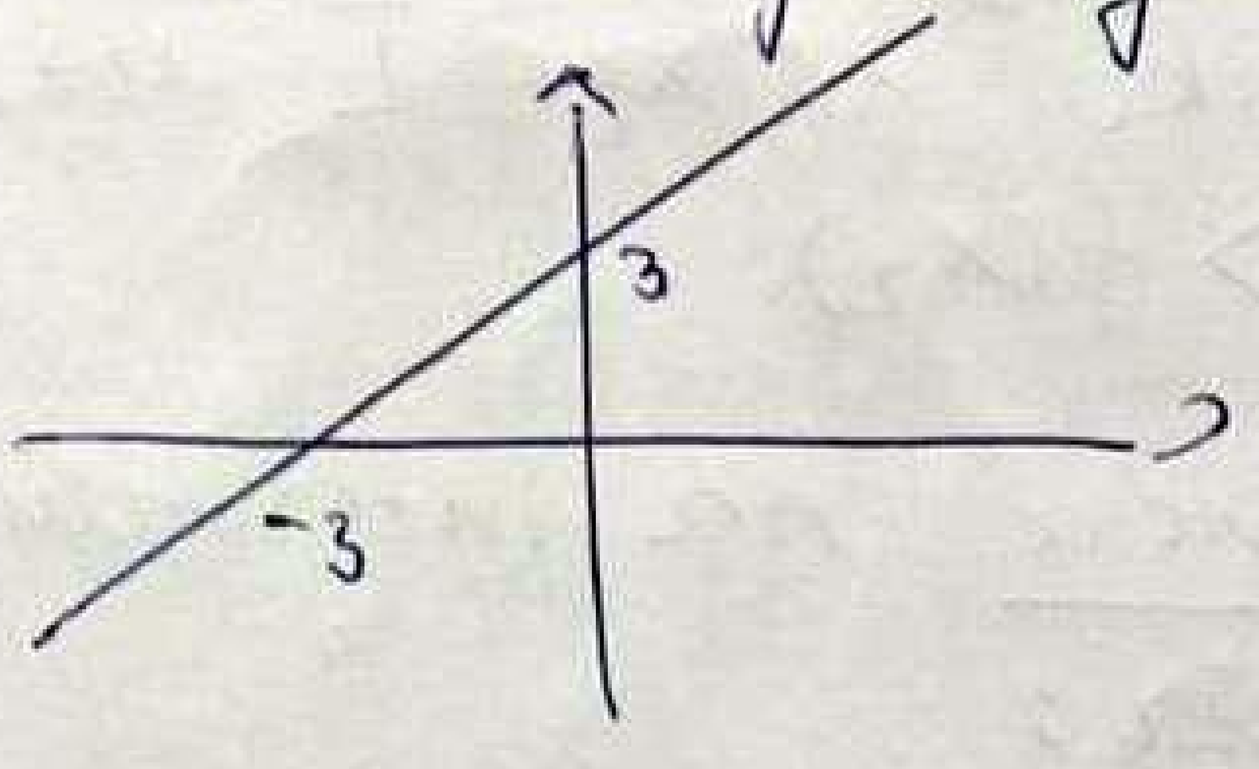
Rastuće, opadajuće, nerastuće i neopadajuće funkcije nazivamo <u>monotonim</u> funkcijama.

Primjer 1:

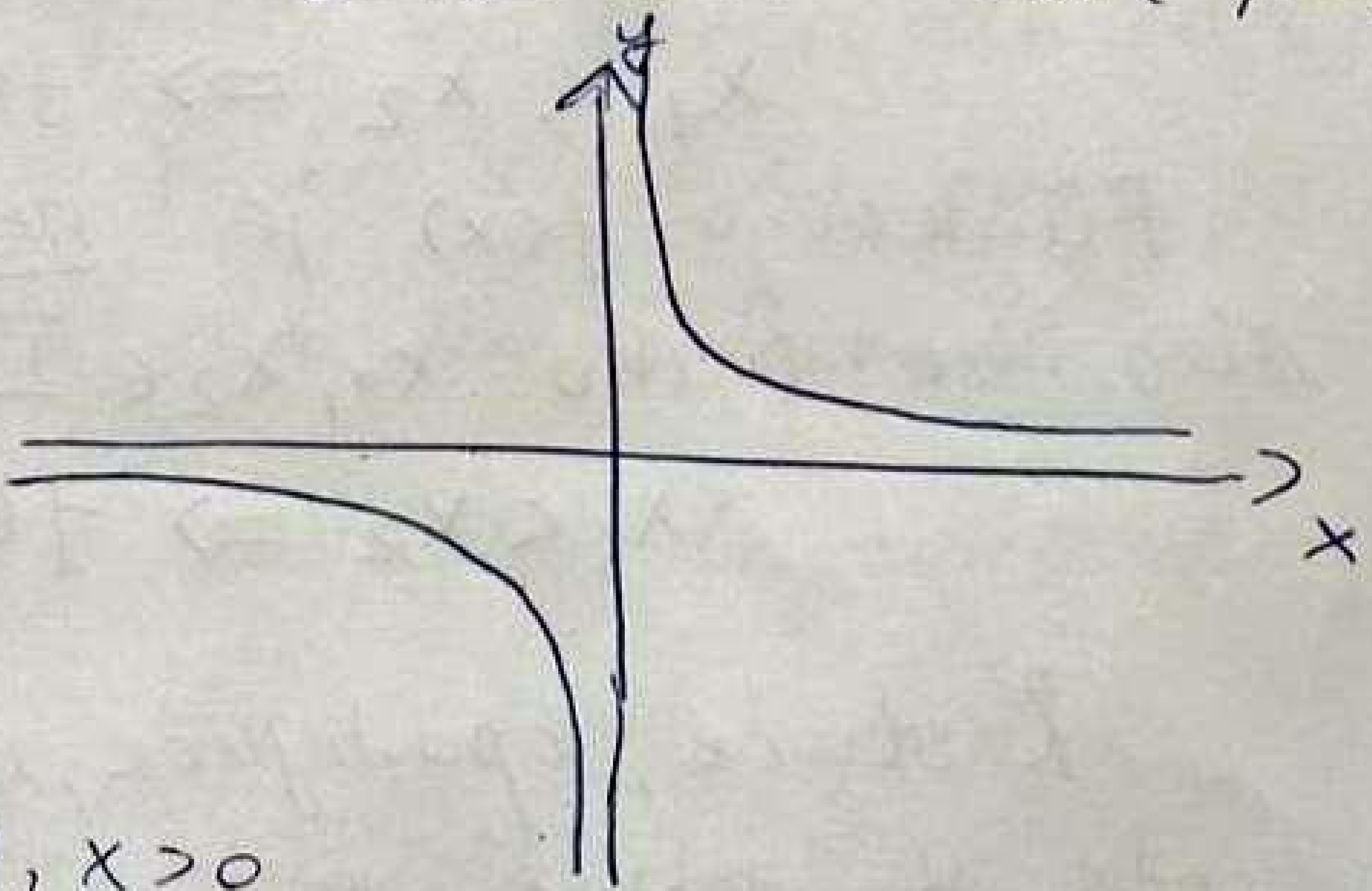
a) Funkcija $y = x^2$ je opadajuća na intervalu $(-\infty, 0]$, rastuća na intervalu $[0, +\infty)$, dok npr. na intervalu $[-1, 1]$ nije monotona.



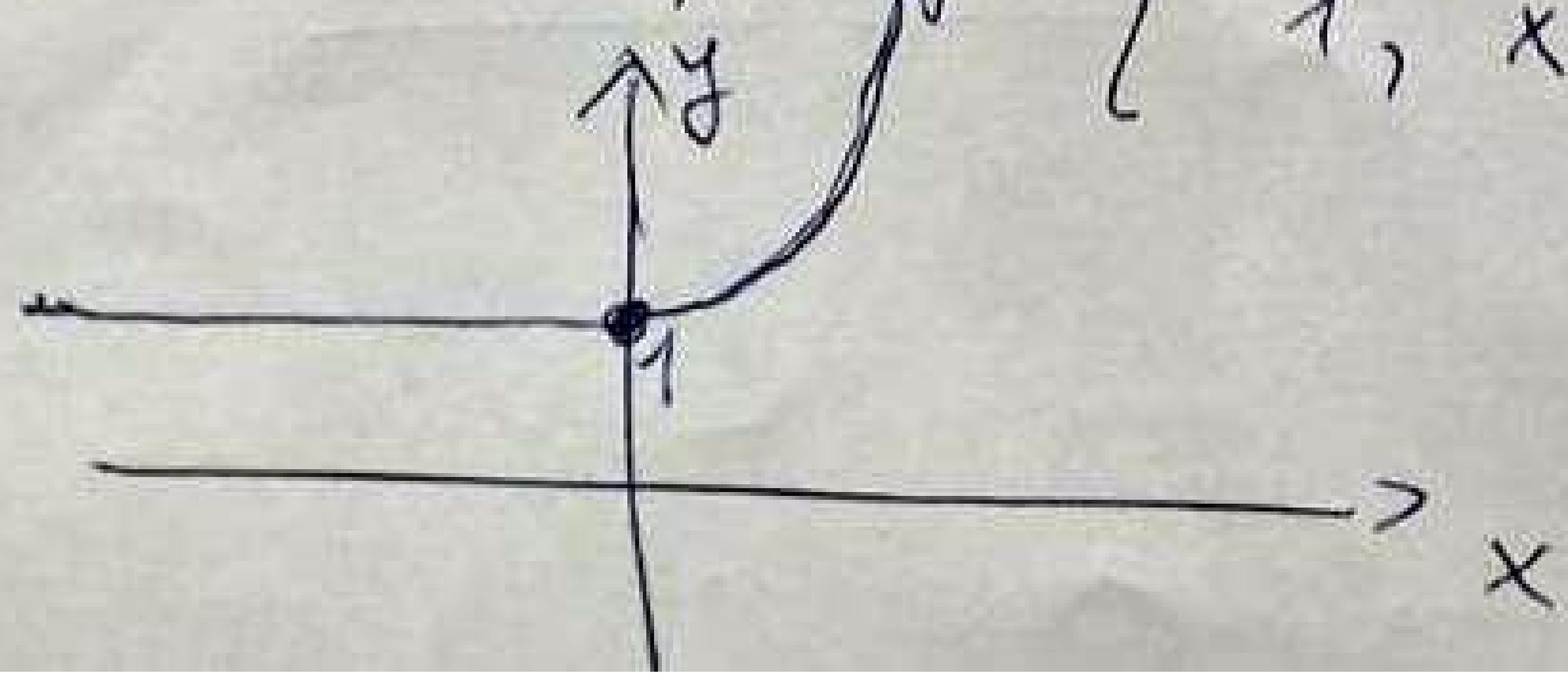
b) Funkcija $y = x + 3$ je rastuća na R.



c) Funkcija $y = \frac{1}{x}$ je opadajuća na intervalu $(-\infty, 0)$ i na intervalu $(0, +\infty)$



d) Funkcija $y = \begin{cases} x^2+1, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$ je neopadajuća na R.



Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna na (a,b). Na osnovu znaka izvoda $f'(x)$ možemo zaključiti da li je funkcija $f(x)$ rastuća ili opadajuća na intervalu (a,b).

Teorema 1:

a) Ako je $f'(x)>0$ za svako $x\in(a,b)$, tada je funkcija $f(x)$ rastuća na intervalu (a,b).

b) Ako je $f'(x)\geq 0$ ~~na intervalu~~ za svako $x\in(a,b)$, tada je funkcija $f(x)$ neopadajuća na intervalu (a,b).

c) Ako je $f'(x)<0$ za svako $x\in(a,b)$, tada je funkcija $f(x)$ opadajuća na intervalu (a,b)

d) Ako je $f'(x)\leq 0$ za svako $x\in(a,b)$, tada je funkcija $f(x)$ nerastuća na intervalu (a,b).

Ova teorema je posledica Lagranžove teoreme.

Primjer 2: Ispitati monotonost funkcije:

a) $f(x)=xe^{-x}$ b) $f(x)=\operatorname{arctg}x+x$

c) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

a) Funkcija $f(x)=xe^{-x}$ je diferencijabilna u svakoj tački $x\in R$. Kako je:

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$$

to je $f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

i $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>1$.

Dakle funkcija je rastuća na intervalu $(-\infty,1)$ i opadajuća na intervalu $(1,+\infty)$.

Ovo ćemo simbolički zapisati na sledeći način:

$y\uparrow$ za $x\in(-\infty,1)$

$y\downarrow$ za $x\in(1,+\infty)$

b) $f(x)=\operatorname{arctg}x+x$

Za svako $x\in R$ važi $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+1>0$

pa je funkcija rastuća na intervalu $(-\infty,+\infty)$.

~~Simbolo~~ Dakle, $y\uparrow$ za $x\in(-\infty,+\infty)$.

c) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$; Funkcija je definisana na intervalu $(0,+\infty)$ i za svako $x\in(0,+\infty)$ postoji $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow x\in(0,e)$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(e,+\infty)$.

Dakle, $y\uparrow$ za $x\in(0,e)$ i $y\downarrow$ za $x\in(e,+\infty)$.

Pod okolinom tačke x_0 podrazumijevamo svaki otvoreni interval koji sadrži tu tačku. Npr. interval $(1,4)$ je okolina tačke 3. Okolinu tačke x_0 označavamo sa $O(x_0)$.

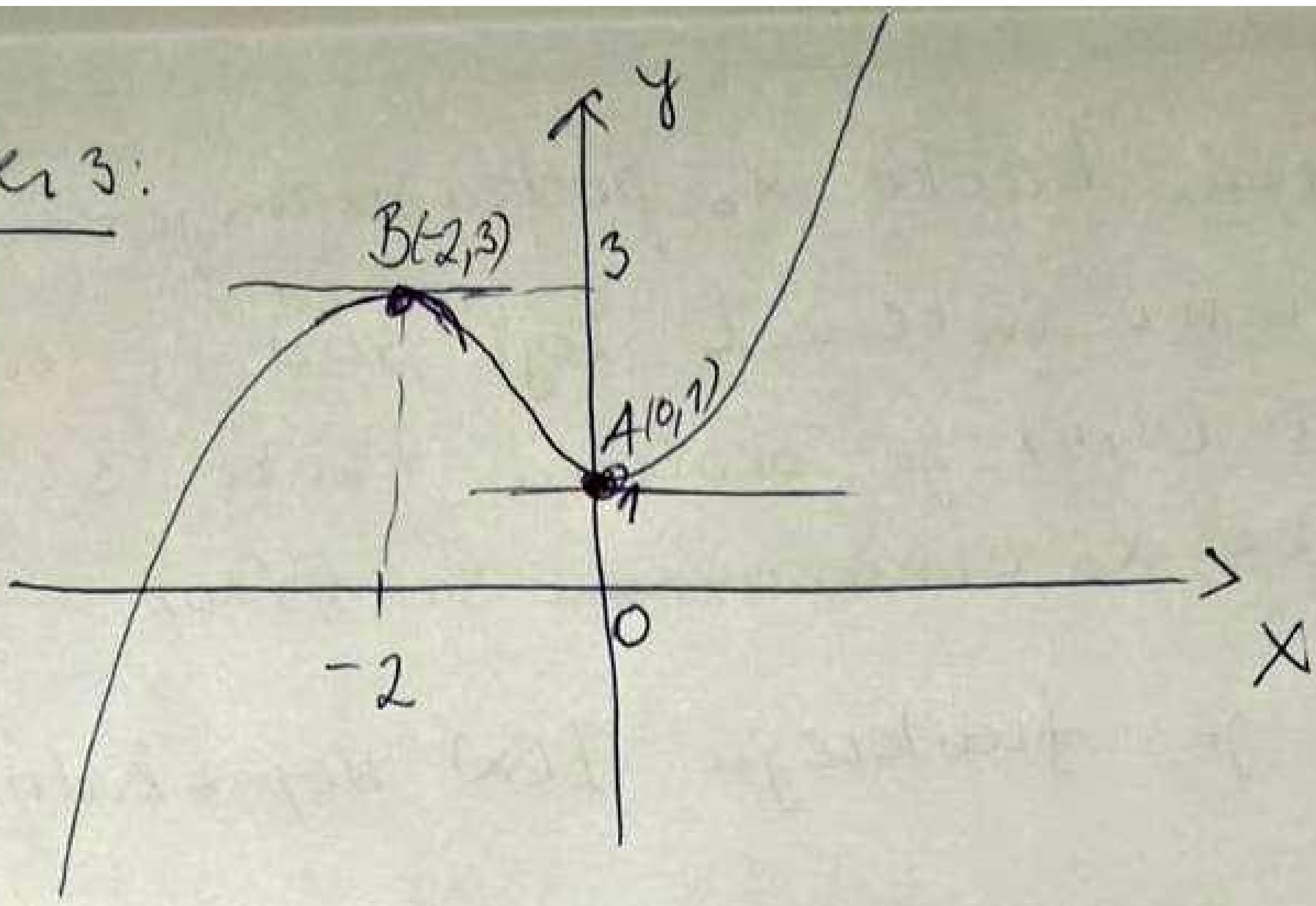
Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na $[a,b]$.

<u>Def</u>: 1) Funkcija $f(x)$ ima strogi lokalni minimum u tački $x_0 \in (a,b)$ ako postoji okolina $O(x_0) \subseteq (a,b)$ takva da je $f(x) > f(x_0)$ za svako $x \in O(x_0), x \neq x_0$.

2) Funkcija $f(x)$ ima strogi lokalni maksimum u tački $x_0 \in (a,b)$ ako postoji okolina $O(x_0) \subset (a,b)$ takva da je $f(x) < f(x_0)$ za svako $x \in O(x_0), x \neq x_0$.

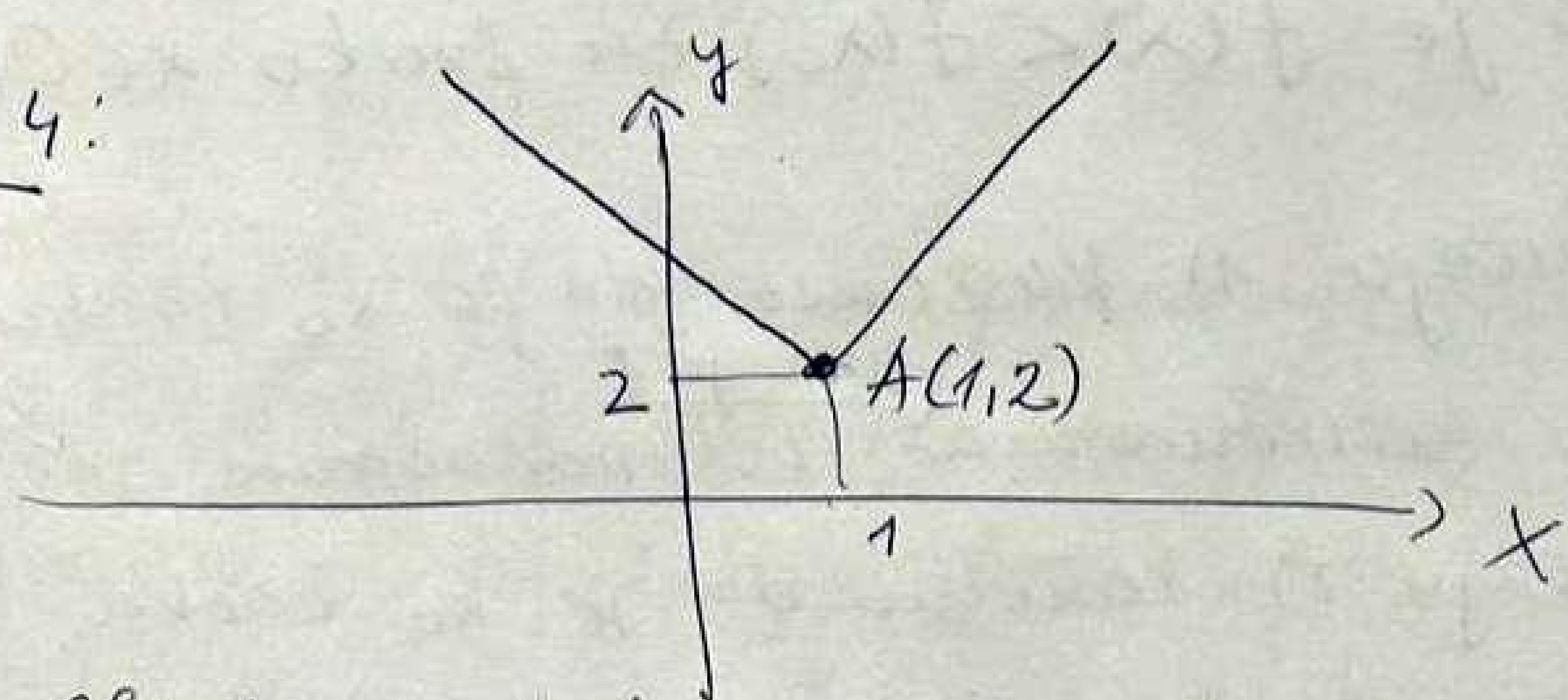
U slučaju 1) kažemo da je x_0 tačka lokalnog minimuma funkcije f i označavamo je sa x_{min} a u slučaju 2) kažemo da je x_0 tačka lokalnog maksimuma i označavamo je sa x_{max}. Tačke lokalnog minimuma i maksimuma nazivamo tačkama lokalnih ekstremuma, a vrijednosti $f(x_{min})$, $f(x_{max})$ nazivamo ekstremumima funkcije.

Primjer 3:



Na slici je dat grafik funkcije $f(x)$ koja ima lokalni maksimum u tački $x=-2$ i lokalni minimum u tački $x=0$. Primijetimo da su tangente na grafik funkcije u tačkama A i B paralelne osi OX.

Primjer 4:

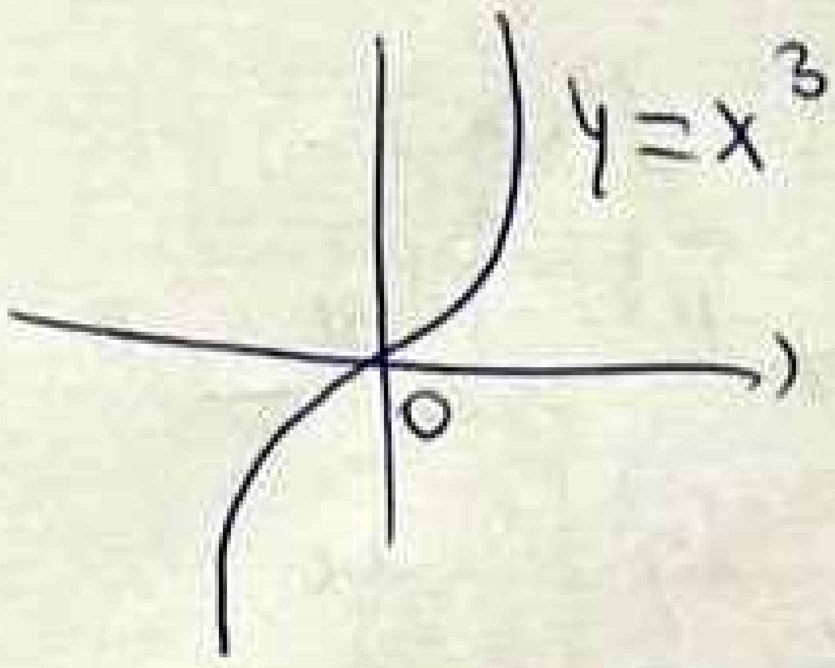


Na slici je dat grafik funkcije koja ima minimum u tački $x=1$. Ova funkcija nije diferencijabilna u tački $x=1$ (ne postoji tangenta na grafik u tački $A(1,2)$.

Teorema 2: Neka je funkcija $f(x)$ definisana na $[a,b]$ i neka u tački $x_0 \in (a,b)$ ima lokalni ekstremum. Ako postoji $f'(x_0)$ tada je $f'(x_0)=0$.

Dakle, u tački ekstremuma izvod funkcije je jednak nuli ili ne postoji.

Primjer 5: Za funkciju $f(x)=x^3$ važi $f'(x)=3x^2$ i $f'(0)=0$. Primijetimo da funkcija $f(x)=x^3$ nema ni lokalni minimum ni lokalni maksimum u tački $x=0$.



Ovaj primjer nam pokazuje da uslov $f'(x_0)=0$ nije dovoljan da bi x_0 bila tačka ekstremuma funkcije $f(x)$ tj. ako je $f'(x_0)=0$ onda je x_0 samo "kandidat" za tačku ekstremuma.

Tačke u kojima je izvod jednak nuli ili ne postoji nazivamo stacionarnim tačkama.

Sledeća teorema nam daje dovoljan uslov za egzistenciju ekstremuma.

<u>Teorema 3:</u> Neka je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u nekoj okolini tačke x_0 osim možda u samoj tački x_0 i neprekidna u tački x_0.

1) Ako $f'(x)$ mijenja znak sa "$-$" na "$+$" pri prolasku kroz tačku x_0, tj. $f'(x)<0$ na nekom intervalu (a, x_0) i $f'(x)>0$ na nekom intervalu (x_0, b), tada je x_0 tačka lokalnog minimuma funkcije $f(x)$.

2) Ako $f'(x)$ mijenja znak sa "$+$" na "$-$" pri prolasku kroz tačku x_0, tj. u nekom intervalu (a, x_0) izvod je pozitivan i u nekom intervalu (x_0, b) izvod je negativan, tada je x_0 tačka lokalnog maksimuma funkcije $f(x)$.

x	(a, x_0)	x_0	(x_0, b)
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

$x_{min} = x_0$
$y_{min} = f(x_0)$

x	(a, x_0)	x_0	(x_0, b)
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

$x_{max} = x_0$
$y_{max} = f(x_0)$.

Primjer 6: Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije:

a) $f(x) = xe^{-x}$

Funkcija ima izvod u svakoj tački $x \in R$.

$f'(x) = (1-x)e^{-x}$.

Kako je $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$, to imamo jednu stacionarnu tačku.

Očigledno, $f'(x) > 0$ za $x \in (-\infty, 1)$ i $f'(x) < 0$ za $x \in (1, +\infty)$.

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

$x_{max} = 1$

$y_{max} = f(1) = e^{-1}$.

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 6$

$f'(x) = 6(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \lor x = -3$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 2)$

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	87	$\searrow$	-38	$\nearrow$

$x_{min} = 2$, $y_{min} = f(2) = 38$

$x_{max} = -3$, $y_{max} = f(-3) = 87$.